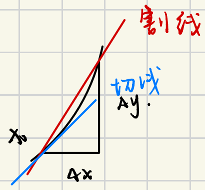
导数定义及求导公式



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = k_{切}$$

$$f(x) = x^2$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

$C' = 0.$ $\quad (x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a} \qquad (\sin x)' = \cos x$

$(e^x)' = e^x \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad (\cos x)' = -\sin x$

$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

① $[af(x)]' = a'f(x) + af'(x)$

② $[f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)]' = f'gh \cdot fgh \cdot fgh'$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) g'(x)}{g^2(x)}$$

距离最值问题

曲线上任意一点到直线的最小值为直线平移到相切时切点到直线距离的最小值.

复合函数求导

$y = \ln(x^2+1)$ 拆成 2个函数,分别求导再相乘

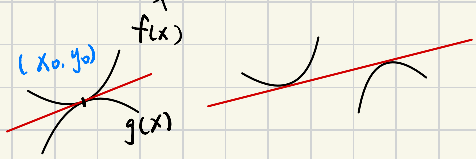
$y = \ln \mu, \quad \mu = x^2+1$

$y' = \frac{1}{\mu} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1}$

$y = \ln[\sin(x^2+1)]$

$\Rightarrow y' = \frac{\cos(x^2+1)}{\sin(x^2+1)} \times 2x$

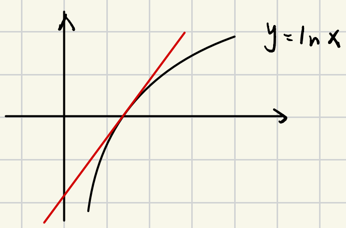
公切线



$f(x_0) = g(x_0)$

$f'(x_0) = g'(x_0)$

$f(x) = \ln x$



$\boxed{x - 1 \geq \ln x}$

第 1 讲：导数概念及几何意义

题型一：导数定义及求导公式

1.设函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，且 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+3\Delta x)-f(x_0)}{2\Delta x}=1$，则 $f'(x_0)$ 等于 A

A．$\frac{2}{3}$　　B．$-\frac{2}{3}$　　C．1　　D．-1

$f'(x_0)=\frac{\cdots}{3\Delta x}$.

2. 已知 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\underline{f'(1)}\cdot x^2+\frac{3}{2}f(1)x$，则 $f(2)$ 的值为

常数

A．-1　　B．0　　C．2　　D．$\frac{3}{2}$

令 $x=1$　$f(1)=\frac{1}{3}-f'(1)+\frac{3}{2}f(1)$

(常数 × 函数)′ = 常数 × 函数′

常数不变，函数求导.

$f'(x)=x^2-f'(1)\cdot 2x+\frac{3}{2}f(1)$

$f(1)$

令 $x=1$　$f'(1)=1-2f'(1)+\frac{3}{2}f(1)$

$f'(1)$ …

3. 求下列函数的导数：$y=\sin^2(2x+\frac{\pi}{3})$．

$y'=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})\cos(2x+\frac{\pi}{3})\times 2$

$=2\sin(4x+\frac{2}{3}\pi)$

4.证明：（1）奇函数的导函数是偶函数；（2）偶函数的导函数是奇函数；（3）周期函数的导函数是周期函数，且周期不变.

5.求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在点 (x_0,y_0) 处的切线方程.　　半代入　　隐函数．$F(x,y)$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2(x)}{b^2}=1$　　　$\frac{2x_0}{a^2}+\frac{2y_0y'}{b^2}=0.$

$\frac{2x}{a}+\frac{2\cdot y\cdot y'}{b^2}=0.$　　　$y'=k=\frac{-x_0b^2}{a^2y_0}$

题型二：在点问题

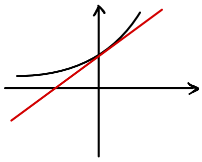
切点 $(1,0)$

6.求 $f(x)=\ln x$ 在 $\underline{x=1}$ 处的切线方程？

$f'(x)=\frac{1}{x}$　　$k=f'(1)=1$　　　$\boxed{y-1\geqslant \ln x}$

$\therefore y=x-1$

7.求 $f(x)=e^{x}$ 在 $(0,1)$ 处的切线方程?



$y'=e^{x}$

$k=e^{0}=1$

$y=x+1$

$\boxed{e^{x}\geqslant x+1}$

8.（2015 陕西）设曲线 $y=e^{x}$ 在点 $(0,1)$ 处的切线与曲线 $y=\dfrac{1}{x}$（$x>0$）上点 P 处的切线垂直，则 P 的坐标为 $\underline{(1,1).}$.

$y=x+1$

x_0

$y'=-\dfrac{1}{x^2}$

$k=-\dfrac{1}{x_0^2}=-1 \quad x_0=1 \quad P(1,1)$

$k=f'(x_0)$

切点在切线也在曲线上

9.已知直线 $y=x+1$ 与曲线 $y=\ln(x+a)$ 相切，则 a 的值为 $\underline{2}$.

法一：$y=x-1$ 与 $y=\ln x$ 相切

都左移 2.

$\therefore \ln(x+2)$

法二：设切点 (x_0,x_0+1)

$y'=\dfrac{1}{x+a} \quad k=\dfrac{1}{x_0+a}=1. \quad x_0=1-a. \quad y_0=2-a.$ 代入曲线 $2-a=\ln 1=0 \quad a=2.$

10.直线 $y=\dfrac{1}{2}x+b$ 是曲线 $y=\ln x(x>0)$ 的一条切线，则实数 $b=\underline{\ln 2-1}$.

设切点 (x_0,y_0)

$y'=\dfrac{1}{x} \quad k=\dfrac{1}{x_0}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_0=2 \\ y=\ln 2=1+b. \end{cases}$

11. 求 $f(x)=\sin x$ 在 $(0,0)$ 处的切线方程?

$y'=\cos x.$

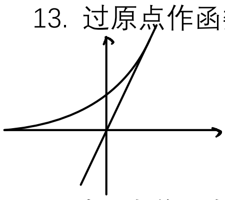
$k=\cos 0=1.$

$y=x$

12.已知函数 $f(x)$ 在 R 上满足 $f(x)=2f(2-x)-x^{2}+8x-8$,则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程是____________.

题型三：过点问题

13. 过原点作函数 $f(x)=e^{x}$ 的切线，求切线方程?



设切点 (x_0,e^{x_0})

$f'(x)=e^{x}$

$k=e^{x_0}$ 切线 $y-e^{x_0}=e^{x_0}\cdot(x-x_0)$ 过 $(0,0)$.

$\boxed{e^{x}\geqslant ex}$

$e^{x}\geqslant x+1 \quad e^{x-1}\geqslant x$

$-e^{x_0}=-x_0e^{x_0}$

$\Rightarrow x_0=1. \quad k=e$

$\therefore y=ex.$

14.过原点作函数 $f(x)=\ln x$ 的切线，求切线方程?

设切点 $(x_0,\ln x_0)$

$f'(x)=\dfrac{1}{x} \Rightarrow k=f'(x_0)=\dfrac{1}{x_0}$

切线 $y-\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}(x-x_0)$ 过 $(0,0)$.

$-\ln x_0=-1$

$x_0=e. \quad k=\dfrac{1}{e}. \quad y=\dfrac{x}{e}$

$\boxed{\dfrac{1}{e}x\geqslant \ln x}$

15.（2021 全国 1 卷文科）已知函数 $f(x)=x^3-x^2+ax+1$.

(2)求曲线 $y=f(x)$过坐标原点的切线与曲线 $y=f(x)$的公共点的坐标 .

设切点 $(x_0,\ x_0^3-x_0^2+ax_0+1)$ 　 切线 $y-x_0^3+x_0^2-ax_0-1=(3x_0^2-2x_0+a)(x-x_0)$

$f'(x)=3x^2-2x+a.$ 　 代入 $(0,0)$. 　 猜根 $(x-1)$

$k=3x_0^2-2x_0+a$ 　 $2x_0^3-x_0^2-1=0.$ 　 $2x_0^3-2x_0^2+x_0^2-1=0.$

$x_0=1$ 　 $2x_0^2(x_0-1)+(x_0-1)(x_0+1)=0$

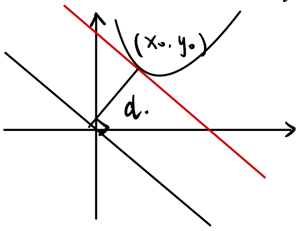
$(x_0-1)(2x_0^2+x_0+1)=0.$

$x_0=1$

$y=(a+1)x.$

题型四：距离最值问题

16.（2019 江苏）在平面直角坐标系 xOy 中， P 是曲线 $y=x+\dfrac{4}{x}$ （ $x>0$ ）上的一个动点，则点 P 到直线 $x+y=0$ 的距离的最小值是 4 .



$y'=1-\dfrac{4}{x^2}$ 　 $d=\dfrac{\sqrt2+3\sqrt2}{\sqrt2}=4.$

$1-\dfrac{4}{x_0^2}=-1$

$x_0^2=2.$ 　 $\begin{cases}x_0=\sqrt2\\ y_0=3\sqrt2\end{cases}$

17.(2012 全国新课标)设点 P 在曲线 $y=\dfrac{1}{2}e^x$ 上，点 Q 在曲线 $y=\ln(2x)$ 上，则 $|PQ|$ 的最小值为 B.

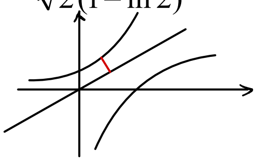
互为反函数，关于 $y=x$ 对称

A. $1-\ln 2$ 　 B. $\sqrt{2}(1-\ln 2)$ ✓ 　 C. $1+\ln 2$ 　 D. $\sqrt{2}(1+\ln 2)$

$y=\frac12 e^x$

$x=\ln 2y$

反函数：$y=\ln 2x$



$\left(\frac12 e^x\right)'=\frac12 e^{x_0}$ 　 $d_0=\dfrac{|\ln2-1|}{\sqrt2}=\dfrac{1-\ln2}{\sqrt2}.$

$k=\frac12 e^{x_0}=1$

$x_0=\ln 2$ 　 $y_0=1.$

18.已知实数 a,b 满足 $2a^2-5\ln a-b=0$ ， $c\in R$ ， 则 $\sqrt{(a-c)^2+(b+c)^2}$ 的最小值为 $\frac32\sqrt2$.

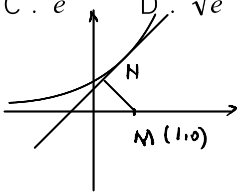
切点 (x_0,y_0). 　 距离公式 (a,b) $(c,-c)$

$y'=4x-\frac{5}{x}$ 　 (a,b) 在 $y=2x^2-5\ln x$ 动点.

$4x_0-\frac{5}{x_0}=-1\Rightarrow\begin{cases}x_0=1\\ y_0=2\end{cases}$ 到 $x+y=0$ 的距离. 　 $(c,-c)$ 在 $y=-x$ 上动.

19.已知 $M(1，0)$， N 是曲线 $y=e^x$ 上一点，则 $|MN|$ 的最小值为（ B ）

A．1 　 B．$\sqrt{2}$ 　 C．e 　 D．$\sqrt{e^4+1}$



$y'=e^x$ 　 $e^{2x_0}=1-2x_0$

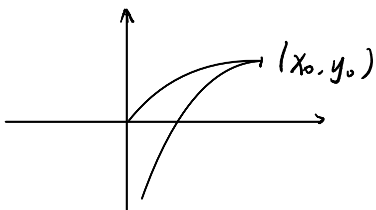
$k=e^{x_0}$ 　 $e^{2x_0}+x_0=1$ 　 超越方程

$k_{MN}=\dfrac{y_0}{x_0-1}$ 　 猜 $x_0=0.$

$\dfrac{y_0}{x_0-1}\times e^{x_0}=-1$

题型五：公切线问题

20. 已知函数 $f(x)=\sqrt{x}$， $g(x)=a\ln x$， $a\in R$.若曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=g(x)$ 相交，且在交点处有相同的切线，求 a 的值及该切线方程.



$f'(x)=\frac12 x^{-\frac12}=\dfrac{1}{2\sqrt x}$ 　 $g'(x)=\dfrac{a}{x}$

$\begin{cases}k=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}=\dfrac{a}{x_0}\\ \sqrt{x_0}=y_0=a\ln x_0\end{cases}$ 　 $a=\dfrac{\sqrt{x_0}}{2}$

$\sqrt{x_0}=\dfrac{\sqrt{x_0}}{2}\cdot\ln x_0\Rightarrow \ln x_0=2\Rightarrow e^2=x_0$ 　 $a=\dfrac{e}{2}$

21.（2015 全国 II 文）已知曲线 $y=x+\ln x$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与曲线 $y=ax^2+(a+2)x+1$ 相切，则 $a=$ ___8___.

$y'=1+\frac{1}{x}$ 切线 $y=2x-1$

二次函数 Δ 即可.

$2x-1=ax^2+ax+2x+1$

$ax^2+ax+2=0$.

$\Delta=a^2-4a\cdot 2=0$. $\Rightarrow a=8$.

22. 若存在过点 $(1,0)$ 的直线与曲线 $y=x^3$ 和 $y=ax^2+\frac{15}{4}x-9$ 都相切，则 a 等于

A. -1或$-\frac{25}{64}$ B. -1或$\frac{21}{4}$ C. $-\frac{7}{4}$或$-\frac{25}{64}$ D. $-\frac{7}{4}$或7

$y_1'=3x^2$

设切点 (x_0,y_0).

$k=3x_0^2=\frac{x_0^3}{x_0-1}$

$3=\frac{x_0}{x_0-1}$

$3x_0-3=x_0$.

$x_0=\frac{3}{2}$. 或 0.

$(\frac{3}{2},\frac{27}{8})$.

切线：① $y=\frac{27}{4}x-\frac{27}{4}=ax^2+\frac{15}{4}x-9$

② $y=0$ $\Delta=0.=(\frac{15}{4})^2+36a$

$a=-\frac{25}{64}$

不一定是同一切点

23.若直线 $y=kx+b$ 是曲线 $y=\ln x+2$ 的切线,也是 $y=\ln(x+1)$ 的切线,$b=$ $\ln\frac{1}{2}+1=1-\ln 2$.

$x_2=-\frac{1}{2}$

$b=\ln\frac{1}{2}+1=1-\ln 2$

$(x_1,\ln x_1+2)$

$y'=\frac{1}{x}$

$y-\ln x_1-2=\frac{1}{x_1}(x-x_1)\Rightarrow y=\frac{1}{x_1}x+\ln x_1+1$

$(x_2,\ln(x_2+1))$

$y'=\frac{1}{x+1}$ $k=\frac{1}{x_2+1}$

$y=\frac{1}{x_2+1}x+\ln(x_2+1)-\frac{x_2}{x_2+1}$

k相等

b相等

24.直线 l 与函数 $f(x)=e^x$，$g(x)=\ln x+2$ 都相切，则直线 l 的方程为______.

切点 (x_1,e^{x_1}) $(x_2,\ln x_2+2)$.

$f'(x)=e^x$ $g'(x)=\frac{1}{x}$

$y=e^{x_1}\cdot x+e^{x_1}-x_1e^{x_1}$ $y=\frac{1}{x_2}x+\ln x_2+1$

$\begin{cases} e^{x_1}=\frac{1}{x_2} \\ (1-x_1)e^{x_1}=\ln x_2+1 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1=1 \\ x_1=0 \end{cases}$

$x_1=x_2+1$

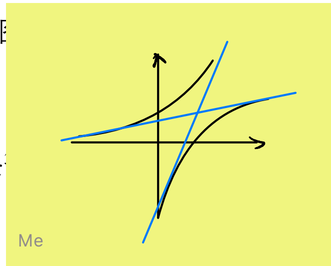
$\ln x_1+1=\ln(x_2+1)-\frac{x_2}{x_2+1}$

a =

25.（2016 山东理）若函数 $y=f(x)$ 的图像上存在两点，使得函数的

互相垂直，则称 $y=f(x)$ 具有 T 性质.下列函数中具有 T 性质的是

A. $y=\sin x$ B. $y=\ln x$ C. $y=e^x$ D. $y=x$



26.若曲线 $f(x)=ax^3+\ln x$ 存在垂直于 y 轴的切线，则实数 a 的取值范围为________.

27.若曲线 $f(x)=ax+\ln x$ 存在与直线 $2x-y=0$ 平行的切线，则实数 a 的取值范围是________.

28.已知曲线 $f(x)=e^{2x}-2e^x+ax-1$ 存在两条斜率为 3 的切线，则实数 a 的取值范围为________.